



Enseignant.e.s: Dovi, Huruguen, Maatouk
Géométrie Analytique - CMS
7 janvier 2025
Durée : 105 minutes

Corrigé







SCIPER : **XXXXX**

Signature  Absent.e







Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 9 questions et 12 pages, les dernières pouvant être vides. Le total est de 32 points. Ne pas dégrafer.

- Posez votre **carte d'étudiant.e** sur la table, **vérifiez** votre nom et votre numéro SCIPER sur la première page et apposez votre **signature**.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix unique**, on comptera :
les points indiqués si la réponse est correcte,
0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
0 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, les enseignant·es se réservent le droit de l'annuler.
- Les dessins peuvent être faits au crayon.
- Répondez dans l'espace prévu (**aucune** feuille supplémentaire ne sera fournie).
- Les brouillons ne sont pas à rendre: ils ne seront pas corrigés.

Respectez les consignes suivantes | Observe this guidelines | Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien

choisir une réponse select an answer Antwort auswählen   	ne PAS choisir une réponse NOT select an answer NICHT Antwort auswählen 	Corriger une réponse Correct an answer Antwort korrigieren  
----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

ce qu'il ne faut **PAS** faire | what should **NOT** be done | was man **NICHT** tun sollte

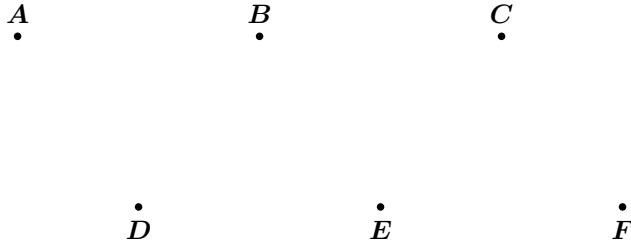









Première partie, questions à choix unique

Pour chaque question, marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'une seule réponse correcte par question.

Pour les **Questions 1, 2 et 3** on donne les points ci-dessous dans le plan, tels que B est le milieu de AC , E le milieu de DF , et $ACFD$ est un parallélogramme.



Question 1 (2 points) Quel est le centre de l'homothétie $t_{\vec{EF}} \circ h_{A, \frac{1}{2}}$?

- ce point n'est pas nommé sur le dessin B
 C A

Correction : Cette transformation est une homothétie, son centre en est le seul point invariant.

Or $t_{\vec{EF}} \circ h_{A, \frac{1}{2}}(C) = t_{\vec{EF}}(B) = C$.

Question 2 (2 points) Soient d et g deux droites du plan, telles que :

- La projection sur d parallèlement à g envoie A sur E
- La symétrie par rapport à g parallèlement à d envoie A sur C .

Quel est le point d'intersection de d et de g ?

- ce point n'est pas nommé sur le dessin F
 E B

Correction : Puisque la projection sur d parallèlement à g envoie A sur E , on sait que (AE) est parallèle à g et que $E \in d$. Puisque la symétrie par rapport à g parallèlement à d envoie A sur C , on sait que (AC) est parallèle à d et que le milieu B de (AC) appartient à g . d est la parallèle à (AC) passant par E , c'est la droite (DF) . g est la parallèle à (AE) passant par B , c'est la droite (BF) . Ces deux droites s'intersectent en F .

Question 3 (2 points) Parmi les affirmations ci-dessous, laquelle est fausse ?

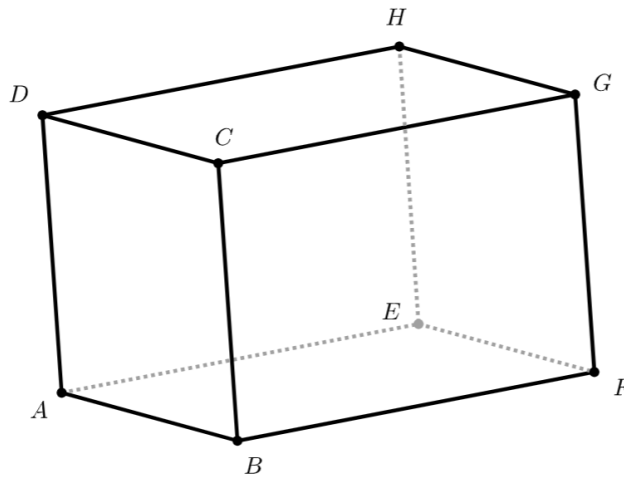
- Il existe une projection qui envoie B à D et E à C
 Il existe une symétrie qui envoie A à E et F à B
 Il existe une rotation qui envoie A à E et C à F
 Il existe une homothétie qui envoie C à B et F au milieu de BE



Correction : S'il existait une telle rotation, son centre serait l'intersection O des médiatrices de AE et de CF . Or en construisant O sur la figure, on observe que l'angle de \vec{OC} à \vec{OF} est inférieur à l'angle de \vec{OA} à \vec{OE} .



Pour les **Questions 4, 5 et 6** on donne le parallélépipède suivant dans l'espace :



Question 4 (2 points) Sélectionner la seule affirmation **qui est fausse** :

- $\vec{EC}, \vec{AF}, \vec{CB}$ est indirecte $\vec{AF}, \vec{DH}, \vec{BC}$ est directe
 $\vec{BD}, \vec{EG}, \vec{BH}$ est indirecte $\vec{BA}, \vec{HE}, \vec{GD}$ est directe

Correction : On ramène les vecteurs au même point et on applique la règle de la main droite.

Question 5 (2 points) Quelle est l'aire du triangle ABC sachant que :

$$A(3, 1, -2), B(2, 2, 0), C(4, -1, 1).$$

dans un repère orthonormé direct de l'espace ?

- 75 $\frac{75}{2}$ $5\sqrt{3}$ $\frac{5\sqrt{3}}{2}$

Correction : Il faut calculer $\frac{1}{2} \|\vec{AB} \times \vec{AC}\|$, en utilisant les formules pour le produit vectoriel et la norme en repère orthonormé direct.

Question 6 (2 points) Quelle droite est décrite par les équations :

$$x + z + 1 = 0, y = 1$$

dans le repère $(E, \vec{EH}, \vec{ED}, \vec{EG})$?

- (BC) (AB) (AD) (BF)

Correction : Cette droite passe par $A(-1, 1, 0)$ et est dirigée par $\vec{AB} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.



Deuxième partie, 1 question de type ouvert

Répondre dans l'espace dédié. Votre réponse doit être soigneusement justifiée, toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse. Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.

Question 7: Cette question est notée sur 6 points.

<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
-------------------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------

Dans cette question, on ne demande que les réponses finales, sans développement. Aucune justification ne sera prise en compte.

Le plan est muni d'un repère.

(a) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la composée $g \circ f$, où :

$$f : \begin{cases} x' = 3x - 2 \\ y' = 3y + 4 \end{cases} \quad g : \begin{cases} x' = -2x + 10 \\ y' = -2y + 15 \end{cases} .$$

f et g sont des homothéties, $g \circ f$ est une homothétie de rapport -6 . Son expression analytique est

$$g \circ f : \begin{cases} x' = -2(3x - 2) + 10 = -6x + 14 \\ y' = -2(3y + 4) + 15 = -6y + 7 \end{cases}$$

En cherchant un point invariant de la transformation ou en utilisant la formule du cours, on obtient les coordonnées du centre $\Omega(2, 1)$.

(b) Déterminer l'expression analytique de la projection sur d parallèlement à g , où :

$$d : y = 3x \quad \text{et} \quad g : y = 7x .$$

La matrice de projection correspondante est

$$P = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} (7 \quad -1)$$

et l'expression analytique de la projection est

$$p : \begin{cases} x' = \frac{7}{4}x - \frac{1}{4}y \\ y' = \frac{21}{4}x - \frac{3}{4}y \end{cases}$$

(c) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation :

$$f : \begin{cases} x' = -\frac{1}{5}x + \frac{12}{5}y \\ y' = \frac{2}{5}x + \frac{1}{5}y \end{cases} .$$

La matrice de la transformation est de trace 0 et de déterminant -1 , c'est donc une symétrie par rapport à un axe d , parallèlement à un axe g . En cherchant les points invariants de la transformation, qui satisfont

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{5}x + \frac{12}{5}y \\ y = \frac{2}{5}x + \frac{1}{5}y \end{cases}$$

on trouve $d : x = 2y$. En cherchant les points (x, y) dont l'image est $(-x, -y)$, donc qui satisfont

$$\begin{cases} -x = -\frac{1}{5}x + \frac{12}{5}y \\ -y = \frac{2}{5}x + \frac{1}{5}y \end{cases}$$

on trouve $g : x = -3y$.



- (c) La droite d passe par Ω et est normale au vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$. La droite $g = r^{-1}(d)$ passe donc aussi par Ω et est normale au vecteur de coordonnées :

$$\begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{5} \\ -\frac{24}{5} \end{pmatrix}$$

(obtenu en tournant \vec{u} de $-\theta$). Elle admet pour équation cartésienne :

$$7x - 24y = 42 - 264 \quad \text{ou encore} \quad 7x - 24y + 222 = 0.$$

- (d) Ecrivons l'expression analytique de la transformation étudiée :

$$t_{\vec{CA}} \circ r \circ t_{\vec{AB}} : \begin{cases} x' = \left(\frac{4}{5}(x+8) - \frac{3}{5}(y-6) + \frac{39}{5}\right) - 18 \\ y' = \left(\frac{3}{5}(x+8) + \frac{4}{5}(y-6) - \frac{7}{5}\right) + 6 \end{cases}$$

Après développement et simplification, on trouvera une expression du type :

$$t_{\vec{CA}} \circ r \circ t_{\vec{AB}} : \begin{cases} x' = \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y + \omega \\ y' = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y + \sigma \end{cases}$$

ce qui montre que la transformation est une rotation d'angle θ . Pour trouver son centre, on peut par exemple observer que A est un point fixe, puisque :

$$(t_{\vec{CA}} \circ r \circ t_{\vec{AB}})(A) = (t_{\vec{CA}} \circ r)(B) = t_{\vec{CA}}(C) = A.$$

Par conséquent, il s'agit de la rotation de centre A et d'angle θ . Le centre peut bien sûr être aussi trouvé par le calcul, en cherchant l'unique solution de :

$$\begin{cases} x = \frac{4}{5}x + \frac{32}{5} - \frac{3}{5}y + \frac{18}{5} + \frac{39}{5} - 18 \\ y = \frac{3}{5}x + \frac{24}{5} + \frac{4}{5}y - \frac{24}{5} - \frac{7}{5} + 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{5}x + \frac{3}{5}y = -\frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5}x + \frac{1}{5}y = \frac{23}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \dots$$
$$\dots \begin{cases} \frac{1}{5}x + \frac{3}{5}y = -\frac{1}{5} \\ 2y = \frac{23}{5} - \frac{3}{5} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -7 \\ y = 2. \end{cases}$$



+1/9/52+

Equations cartésiennes de la droite ℓ :

$$x - 2 = \frac{y - 2}{5} = \frac{z}{4}$$



+1/10/51+



+1/11/50+

